www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: **جبر و احتمال**	رشته: **ریاضی و فیزیک**	ساعت شروع: ۱۰/۳۰ صبح	مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه
سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)		تاریخ امتحان: ۱۳۸۱/۱۰/ ۱۰	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهرا ن در دی ماه سال ۱۳۸۱		**سازمان آموزش و پرورش شهر تهران** **اداره سنجش وارزشیابی تحصیلی**	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید : $(n\in N)$ $\frac{1}{1\times5}+\frac{1}{5\times9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$	۱/۵
۲	با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر از مکعب یک عدد فرد ، یک واحد کم کنیم عددی زوج بدست می آید.	۱
۳	هر گاه x و $y\in R^+$ ثابت کنید : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$	۱
٤	می دانیم $\sqrt{5}$ عددی گنگ است . با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $6+\sqrt{5}$ یک عددگنگ است .	۱
٥	۱۳ نفر در یک مهمانی حضور دارند . نشان دهید حداقل ۴ نفر از آنها در یک فصل سال متولد شده اند .	۱
٦	اگر $A_n=(-\frac{1}{n},\frac{2n-1}{n}),n\in N$ مطلوبست A_1 و A_2 و A_3 سپس اجتماع و اشتراک A_1 و A_2 و A_3 را مشخص کنید .	۱/۲۵
۷	به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید: $(B-A)\cup(A\cap B)=B$	۰/۷۵
۸	مجموعهٔ $A=\{x\mid x\in N \quad 2\leq x<5\}$ و $B=\{x\mid x\in N \quad 3<x\leq 4\}$ مفروض است حاصلضرب دکارتی $A\times B$ را نوشته و نمودار آن را رسم کنید .	۱
۹	نمودار رابطهٔ $R=\{(x,y)\in R^2 \mid x^2+y^2\leq 4 \ , \ y\leq x+2\}$ را رسم کنید .	۱
۱۰	رابطهٔ R روی R^2 به صورت $(x,y)R(m,n)\Leftrightarrow x^2-m^2=y^2-n^2$ تعریف شده است . **الف** - ثابت کنید R یک رابطهٔ هم ارزی است . **ب** - کلاس هم ارزی $[(2,3)]$ را مشخص کنید .	۱/۵
۱۱	هر یک از اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۲ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارتها یکی را به طور قرعه بر می داریم مطلوبست تعیین: **الف ـ** فضای نمونه ای . **ب ـ** پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۵ باشد. **پ ـ** پیشامد B که درآن عدد روی‌کارت مضرب ۳ وزوج باشد. **ت** - پیشامد C که درآن عدد روی کارت مضرب ۳ یا اول باشد.	۲
۱۲	ازجعبه ای که درآن ۳ مهره سفید و ۴ مهرهٔ سیاه است دو مهره با هم و به تصادف خارج می کنیم مطلوبست احتمال اینکه : **الف** - دو مهره همرنگ باشند . **ب** - دو مهره همرنگ نباشد .	۲
۱۳	اگر احتمال قبولی علی دو برابر احتمال قبولی حسین و احتمال قبولی حسین $\frac{1}{4}$ احتمال قبولی اکبر باشد احتمال قبولی هر یک را حساب کنید .	۲
۱٤	نقطه ای به تصادف داخل مربعی به ضلع ۴ در نظر می گیریم .مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه فاصلهٔ این نقطه از هر رأس کوچکتر از ۱ باشد.	۱/۵
۱٥	اگر $P(A)=\frac{1}{4}$ و $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$ و A و B دو پیشامد ناسازگار باشند $P(B')$ را حساب کنید .	۱/۵
	« موفق باشید » **جمع نمرات**	۲۰

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: **جبر و احتمال**	رشته: **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)	تاریخ امتحان: ۱۳۸۱/۱۰/ ۱۰
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهرا ن در دی ماه سال ۱۳۸۱	**سازمان آموزش و پرورش شهر تهران** **اداره سنجش وارزشیابی تحصیلی**

ردیف	راهنمای تصحیح
۱	$\begin{cases} P(1): \frac{1}{1\times5}=\frac{1}{4\times1+1} \quad \frac{1}{5}=\frac{1}{5} \quad (0/25) \\ P(k): \frac{1}{1\times5}+\frac{1}{5\times9}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{k}{4k+1} \quad (0/25) \end{cases}$ $P(k+1): \frac{1}{1\times5}+\frac{1}{5\times9}+\ldots+\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}+\frac{1}{(4k+1)}\frac{1}{(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}$ (۰/۲۵)حکم استقرا طرف چپ حکم استقرا $=\frac{k}{4k+1}+\frac{1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k(4k+5)+1}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{4K^2+5k+1}{(4k+1)(4k+5)}$ $=\frac{(k+1)(4k+1)}{(4k+1)(4k+5)}=\frac{k+1}{4k+5}$ (۰/۷۵)
۲	$x=2k+1 \quad (0/25) \quad x^3-1=(2k+1)^3-1=(2k)^3+3(2k)^2(1)+3(2k)(1)^2+(1)^3-1 \Rightarrow (0/25)$ $x^3-1=8k^3+12k^2+6k \,(0/25) \Rightarrow x^3-1=2\left(4k^3+6k^2+3k\right)=2k' \,(0/25)$
۳	$(x-y)^2\geq 0 \quad (0/25) \Rightarrow x^2+y^2-2xy\geq 0 \Rightarrow$ $x^2+y^2\geq 2xy \xrightarrow[\text{تقسیم می کنیم xy}]{\text{طرفین نا معادله را بر}} \frac{x^2+y^2}{xy}\geq\frac{2xy}{xy}$ (۰/۲۵) $\frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{xy}\geq 2 \quad (0/25) \Rightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$
٤	اگر $6+\sqrt{5}$ گنگ نباشد پس گویا هست (۰/۲۵) $6+\sqrt{5}=\frac{p}{q} \quad \begin{cases} p,q\in z \\ q\neq 0 \end{cases} \quad (0/25)$ $6+\sqrt{5}=\frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{5}=\frac{p}{q}-6 \quad (0/25) \Rightarrow \sqrt{5}=\frac{p-6q}{q} \Rightarrow \sqrt{5}=\frac{k}{q}$ به یک تناقض رسیده ایم .پس حکم برقرار است .(۰/۲۵)
۵	(۰/۲۵) بنابر اصل لانه کبوتر ۴⟨۱۳ ۴ لانه کبوتر = ۴ فصل سال (۰/۲۵) ۱۳ کبوتر = ۱۳ نفر $13 \,\vert\, \frac{4}{3} \longrightarrow 3+1=4$ (۰/۲۵) پس حداقل ۴ نفر از آنها در یک فصل متولد شده اند (۰/۲۵)

ادامه در صفحه ی دوم

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: **جبر و احتمال**	رشته: **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)	تاریخ امتحان: ۱۳۸۱/۱۰/ ۱۰
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهرا ن در دی ماه سال ۱۳۸۱	سازمان آموزش و پرورش شهر تهران اداره سنجش وارزشیابی تحصیلی

۶

$A_1=(-1,1)$ $A_2=(-\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ $A_3=(-\frac{1}{3},\frac{5}{3})$ (۰/۷۵)

$A_1\cup A_2\cup A_3=(-1,\frac{5}{3})$ (۰/۲۵)

$A_1\cap A_2\cap A_3=(-\frac{1}{3},1)$ (۰/۲۵)

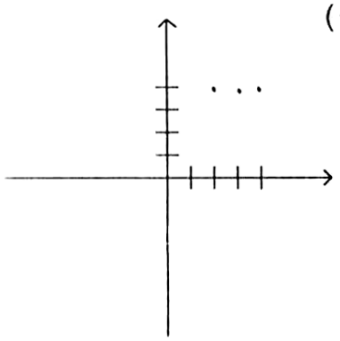
۷

$(B-A)\cup(A\cap B)=B$ $(B\cap A')\cup(A\cap B)=B$ (۰/۲۵)

$B\cap(A'\cup A)=B$ (۰/۲۵) $B\cap U=B$ (۰/۲۵) $\Rightarrow B=B$

۸

(۰/۲۵)

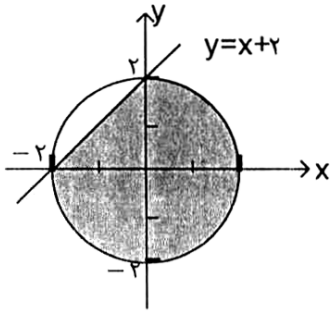


$A=\{2,3,4\}$ (۰/۲۵) $B=\{4\}$ (۰/۲۵) $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$

$A\times B=\{(2,4),(3,4),(4,4)\}$ (۰/۲۵)

۹

$\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ y\le x+2 \end{cases}$ $(0,2),(-2,0)$



خط (۰/۲۵) دایره (۰/۵) هاشور (۰/۲۵)

ادامه در صفحه ی سوم

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنما . تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: **جبر و احتمال**	رشته : **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)	تاریخ امتحان: ۱۳۸۱/۱۰/ ۱۰
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهرا ن در دی ماه سال ۱۳۸۱	سازمان آموزش و پرورش شهر تهران اداره سنجش وارزشیابی تحصیلی

۱۰

$\{(x,y)R(x,y) \Rightarrow x^2 - x^2 = y^2 - y^2 \qquad 0=0 \quad (۰/۲۵)$ (۱)

$\begin{cases}(x,y)R(m,n) \Rightarrow (m,n)R(x,y)\\ x^2 - m^2 = y^2 - n^2 \Rightarrow m^2 - x^2 = n^2 - y^2\end{cases}$ (۰/۲۵) (۲)

$\begin{cases}(x,y)R(m,n) \text{ و } (m,n)R(e,f) \Rightarrow (x,y)R(e,f)\\ \begin{cases}x^2 - m^2 = y^2 - n^2\\ m^2 - e^2 = n^2 - f^2\end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} x^2 - m^2 + m^2 - e^2 = y^2 - n^2 + n^2 - f^2 \quad x^2 - e^2 = y^2 - f^2\end{cases}$ (۳) (۰/۵)

از رابطهٔ ۱و۲و۳ نتیجه می گیریم R یک رابطهٔ هم ارزی است .

$[(۲,۳)] = \{(x,y) \mid (x,y)R(۲,۳)\} = \{x^2 - ۴ = y^2 - ۹\}$ (۰/۲۵) $= \{x^2 - y^2 = -۵\}$ (۰/۲۵)

۱۱

الف ـ $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰,۱۱\}$ (۰/۵)

ب ـ $A = \{۵,۱۰\}$ (۰/۲۵)

پ ـ $B = \underset{(۰/۲۵)}{\{۳,۶,۹\}} \cap \underset{(۰/۲۵)}{\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}} = \underset{(۰/۲۵)}{\{۶\}}$

ت ـ $C = \{۳,۶,۹\} \cup \{۲,۳,۵,۷,۱۱\} = \{۲,۳,۵,۶,۷,۹,۱۱\}$ (۰/۲۵) (۰/۲۵)

۱۲

الف : هر دو مهره همرنگ یعنی هر دو سفید یا هر دو سیاه (۰/۲۵) ۳+٤=۷

$n(s) = \binom{۷}{۲}$ (۰/۲۵)

$n(A) = \binom{۳}{۲} + \binom{۴}{۲}$ (۰/۲۵)

$P(A) = \dfrac{\binom{۳}{۲} + \binom{۴}{۲}}{\binom{۷}{۲}} = \dfrac{۹}{۲۱}$ (۰/۵)

ب : $n(B) = \binom{۳}{۱} \times \binom{۴}{۱}$ (۰/۲۵)

$P(B) = \dfrac{\binom{۳}{۱} \times \binom{۴}{۱}}{\binom{۷}{۲}} = \dfrac{۱۲}{۲۱}$ (۰/۵)

ادامه در صفحه ی چهارم

www.alm.loxblog.com

www.alm.loxblog.com

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: **جبر و احتمال**	رشته: **ریاضی و فیزیک**
سال سوم آموزش متوسطه سالی - واحدی (۲۰ نمره ای)	تاریخ امتحان: ۱۳۸۱/۱۰/ ۱۰
دانش آموزان و داوطلبان آزاد شهر تهرا ن در دی ماه سال ۱۳۸۱	سازمان آموزش و پرورش شهر تهران اداره سنجش وارزشیابی تحصیلی

۱۳

$P(A)=۲P(H)$ (۰/۲۵) $P(H)=\frac{۱}{۴}P(K) \Rightarrow P(A)=۲(\frac{۱}{۴}P(K))=\frac{۱}{۲}P(K)$ (۰/۲۵)

$P(A)+P(H)+P(K)=۱$ (۰/۲۵) $\frac{۱}{۲}P(K)+\frac{۱}{۴}P(K)+P(K)=۱ \Rightarrow \frac{۷}{۴}P(K)=۱$

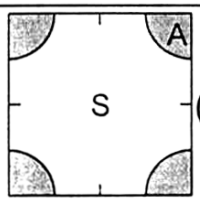
$P(K)=\frac{۴}{۷}$ (۰/۷۵) $P(H)=\frac{۱}{۴}(\frac{۴}{۷})=\frac{۱}{۷}$ (۰/۲۵) $P(A)=\frac{۱}{۲}(\frac{۴}{۷})=\frac{۲}{۷}$ (۰/۲۵)

۱۴

$a(s)=۴^۲=۱۶$ (۰/۲۵)

$a(A)=a$ (۴ ربع دایره) $=a$(دایره) $=\pi(۱)^۲=\pi$ (۰/۵)

$P(A)=\frac{\pi}{۱۶}$ (۰/۵)



(۰/۲۵)

۱۵

$A \cap B=\varphi$ (۰/۲۵) $\Rightarrow P(A \cap B)=۰$ (۰/۲۵)

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$ (۰/۲۵) $\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۴}+P(B)$ $P(B)=\frac{۵}{۱۲}$ (۰/۵)

$P(B')=۱-P(B)=۱-\frac{۵}{۱۲}=\frac{۷}{۱۲}$ (۰/۲۵)

مصححین محترم ، با عرض سلام و خسته نباشید ،

لطفاً برای راه حلهای درست دیگر بارم را به تناسب تقسیم فرمائید .

با تشکر

www.alm.loxblog.com